Devoir surveillé n^o 6

Vendredi 28 mars

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Rappel des consignes

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1. (*d'après CCINP 2019*)

Partie I - Isométrie de $\mathbb{R}^3$

Soit A la matrice définie par $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Q1. Montrer que $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

Q2. L'isométrie associée à la matrice A est-elle directe ou indirecte ?

Q3. Démontrer que $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$ où $\vec{u}$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.

Q4. Soit $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $\det(\vec{\jmath},\ A\vec{\jmath},\ \vec{u})$.

Q5. Déterminer les caractéristiques de l'isométrie associée à A dans $\mathbb{R}^3$.

Partie II - Espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2 et E l'ensemble des matrices de taille 2, réelles et symétriques.
Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$, on pose $\varphi(M, M') = aa' + 2bb' + cc'$.

Q6. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\dim(E) = 3$.

Q7. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Q8. Soit $\mathcal{B}$ la famille définie par :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

Partie III - Application linéaire sur E

On considère E muni du produit scalaire φ défini dans la partie II.
On définit l'application f sur E par : $\forall M \in E$ avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,

$$f(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{a+c}{2} - b & \dfrac{a-c}{2} \\ \dfrac{a-c}{2} & \dfrac{a+c}{2} + b \end{pmatrix}.$$

Q9. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q10. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Q11. À l'aide de la partie I, déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice B de f dans cette base soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q12. Montrer que f conserve la trace et le déterminant.

Exercice 2. (*d'après CCINP 2021*)
On rappelle que pour x réel strictement positif et α réel, on note $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$.
On considère la fonction $g\colon x \longmapsto x^x$ et on pose $I =]0\,;+\infty[$ son ensemble de définition.

Partie I - Étude de la fonction g

Q13. Calculer $g(1)$ et justifier que g est dérivable sur I.

Q14. Dresser le tableau de variations de g et préciser ses limites aux bornes de I.

Q15. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de g.

Q16. On admet que $g(x) \underset{x\to 1}{=} 1 + (x-1) + (x-1)^2 + o((x-1)^2)$. Déterminer la position relative de la tangente au point d'abscisse 1 par rapport à la courbe représentative de g.

Q17. Représenter sur l'intervalle $]0\,;2]$ la courbe représentative de g et la tangente obtenue dans la question précédente sur le même graphique.
On donne $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$ et $g(\mathrm{e}^{-1}) \approx 0{,}69$.

Q18. En utilisant le graphique, justifier l'encadrement $\mathrm{e}^{-1} < \displaystyle\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x < 1$.

Partie II - Un calcul d'intégrales

Q19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$.

Q20. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Justifier que la fonction $x \longmapsto x^n (\ln x)^k$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement prend la valeur 0 en 0.

Dans la suite, on notera la fonction prolongée de la même façon.

Q21. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^k \,\mathrm{d}x = -\frac{k}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^{k-1} \,\mathrm{d}x.$$

Q22. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire par récurrence sur k, que pour tout entier naturel k, on a :

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^k \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

Justifier que cette égalité est encore vraie pour $(n,k) = (0,0)$.

Partie III - Expression de $\displaystyle\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une série

Q23. Rappeler le développement en série entière de $z \mapsto \mathrm{e}^z$ ainsi que son rayon de convergence.

Q24. Justifier que $\displaystyle\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x \ln x)^n}{n!} \,\mathrm{d}x$.

Q25. En déduire l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Q26. À l'aide du critère spécial des séries alternées, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ est convergente.

Q27. Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $R_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ le reste au rang p de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ et on admet l'inégalité $|R_p| \leqslant \dfrac{1}{(p+2)^{p+2}}$.

Dans le langage Python, écrire une fonction `approximation(e)` qui prend en paramètre un nombre réel strictement positif `e` et qui renvoie un nombre réel représentant l'approximation de $\displaystyle\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x$ dont l'erreur maximale commise est `e`.

Donner ensuite une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x$ à $\dfrac{1}{27}$ près.

Partie IV - Étude d'un point critique

Soit f la fonction de deux variables définie par $f : (x, y) \longmapsto x^y - x$.

Q28. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et le représenter dans le plan.

Q29. Montrer que f admet un et un seul point critique dans D_f et vérifier que la valeur de f en ce point critique vaut 0.

Q30. Montrer que : $f(1+h,\, 1-h) \underset{h \to 0}{=} -h^2 + o(h^2)$.

On **admet** qu'on obtient de façon analogue $f(1+h,\, 1+h) \underset{h \to 0}{=} h^2 + o(h^2)$.

Q31. Justifier que le point critique n'est pas un extremum.

Exercice 3. Optimisation du choix d'une place de parking (*d'après CCINP 2019*)
On considère une rue infiniment longue et rectiligne. On souhaite aller à un numéro précis de cette rue. Devant chaque numéro se trouve une place de parking. On cherche à savoir à partir de quel moment on doit commencer à s'intéresser aux places disponibles pour pouvoir se garer près de l'arrivée.
Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n, il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p \in]0\,;1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations des places sont indépendantes les unes par rapport aux autres.
Notre stratégie est la suivante : on se donne s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus).
On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.

Partie I - Loi de X

Q32. Donner l'univers-image de $X(\Omega)$.

Q33. Déterminer la loi de X.

Q34. Soit $Y = X - s + 1$. Montrer que Y est une loi géométrique de paramètre p dont on donnera l'espérance et la variance.

Q35. En déduire l'espérance et la variance de X.

Partie II - Calcul de la distance moyenne à l'arrivée

On souhaite aller au numéro d de cette rue avec $d \in \mathbb{N}^*$. Notre stratégie reviendra à choisir un numéro s compris entre 0 et d. Pour rappel, $s = 0$ correspond à chercher une place dès le début de la rue.
La distance à l'objectif est $|X - d|$ et l'espérance $D_s = E\big(|X - d|\big)$ est la distance moyenne à l'arrivée (on admet que D_s existe).
Pour simplifier, on prend $p = \dfrac{1}{10}$ dans cette partie.

Q36. Établir que $D_s = S_1 + S_2$ avec $S_1 = \displaystyle\sum_{n=s}^{d}(d-n)P(X=n)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)P(X=n)$.

Q37. Soit la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall k \geqslant 0,\ u_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}(k-i)\left(\frac{9}{10}\right)^i$.

Montrer que $\forall k \geqslant 0,\ u_{k+1} = \dfrac{9}{10}u_k + k + 1$.
On pourra effectuer un changement d'indice $j = i - 1$.

Q38. Montrer, par récurrence, que pour tout $k \geqslant 0$, $u_k = 10k - 90 + 90\left(\dfrac{9}{10}\right)^k$.

Q39. Exprimer S_1 à l'aide de u_{d-s} puis donner l'expression de S_1 en fonction de d et s.

Q40. Justifier que $S_2 - S_1 = E\big(X - d\big)$.
En déduire la valeur de S_2 puis D_s.

Partie III - Optimisation

On admet que, pour pour $p \in]0\,;1[$, $D_s = d - s + 1 - \dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$.

Q41. Simplifier $D_{s+1} - D_s$.

Q42. Étudier le signe de $D_{s+1} - D_s$.

En déduire que D_s est minimale pour s le plus petit entier strictement supérieur à α, avec $\alpha = d + \dfrac{\ln 2}{\ln(1-p)}$.

Q43. Dans cette question uniquement, on s'intéresse à l'exemple pour lequel $p = \dfrac{1}{10}$.

En utilisant l'encadrement $2^{-1/6} < 0{,}9 < 2^{-1/7}$, à quelle distance de l'arrivée doit-on commencer à chercher une place ?

Q44. Simulation : recopier et compléter le programme en Python suivant pour simuler notre stratégie.

```python
def Bernoulli(q):
    return random() < q

def distance(s, d, p):
    Y = ...
    while ... :
        Y = ...
    return abs(Y - d)
```

La fonction `Bernoulli` simule une variable de Bernoulli Y. Elle prend comme paramètre un nombre à virgule flottante `q`. La variable `q` correspond au paramètre de la variable de Bernoulli Y. Elle renvoie un booléen qui vaut `True` si $Y = 1$ et `False` si $Y = 0$.

La fonction `distance` simule notre stratégie. Elle prend comme paramètres les entiers `s` et `d` et un nombre à virgule flottante `p`. Ces variables correspondent aux valeurs introduites dans les sections précédentes. Elle renvoie un entier représentant la distance à parcourir en sortant de la voiture.

FIN